

Money matters:
Matematica e denaro

Marco LiCalzi
Università Ca' Foscari Venezia

La storia (della matematica) in classe:
storie di donne e di uomini, storie di idee

Venezia, 13–15 Aprile 2018

Quattro libri per quattro idee

[1202] [Liber abbaci](#), di Leonardo Pisano (c1170-c1241)

Computisteria: applicazione dell'aritmetica all'attività commerciale.

[1494] [Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita](#), di Luca Pacioli (c1447-1517)

Matematica finanziaria: applicazione della matematica ai pagamenti, tenendo conto del passaggio del tempo.

[1671] [Waardije van Lyf-renten naer Proportie van Los-renten](#), di Jan De Witt (1625-1672)

Matematica attuariale: applicazione della matematica ai pagamenti, tenendo conto del tempo e degli eventi rischiosi.

[1959] [Portfolio selection: Efficient diversification of investments](#), di Harry Markowitz (1927-)

Finanza matematica: applicazione della matematica allo studio dei mercati e dei titoli finanziari.

Il senso comune non basta

Sia Anna sia Berto percorrono 15.000 km. all'anno in auto.

Anna cambia la berlina (consumo: 12km/l) per un'auto ibrida (17km/l).

Berto modifica il SUV (5km/l) e ne migliora l'efficienza (6km/l).

Chi dei due risparmia più carburante?

Anna o Berto?

Berto

Confrontate il risparmio di Berto rispetto a quello di Anna:

è più o meno del 20%?

36%

Come variano le risposte quando cambia il chilometraggio annuo?

500 anni in tre minuti



L'impero carolingio (800-888)

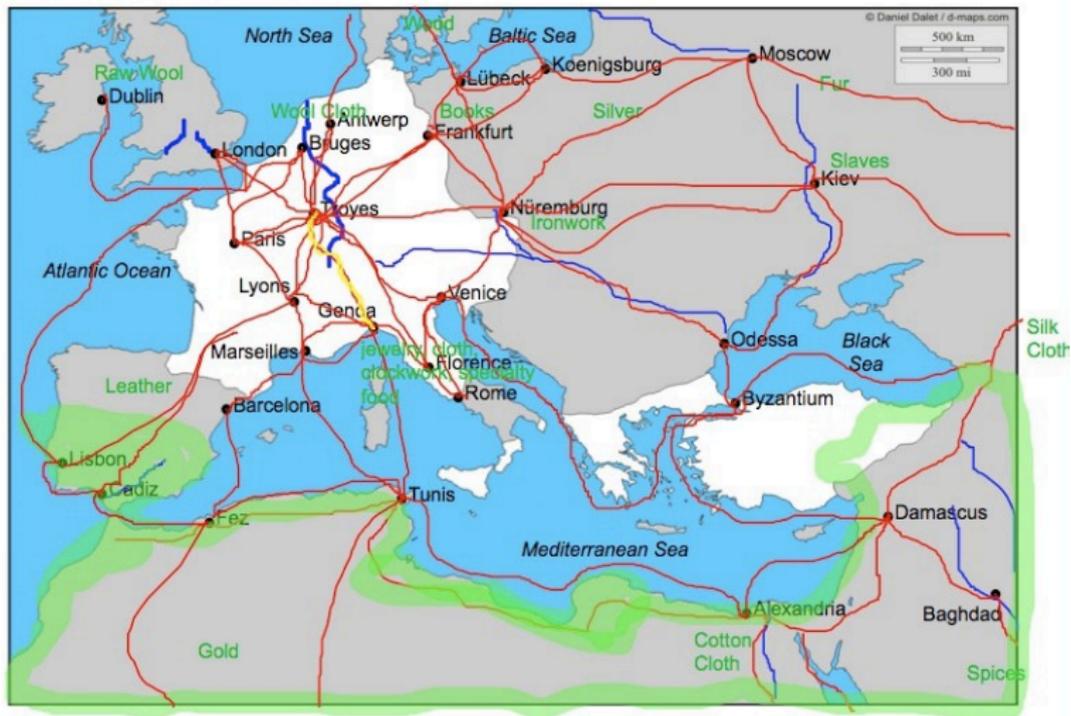
L'unica moneta dell'impero è il **denaro**: 12 denari valgono un **soldo**, 20 soldi corrispondono a una **libbra** d'argento.



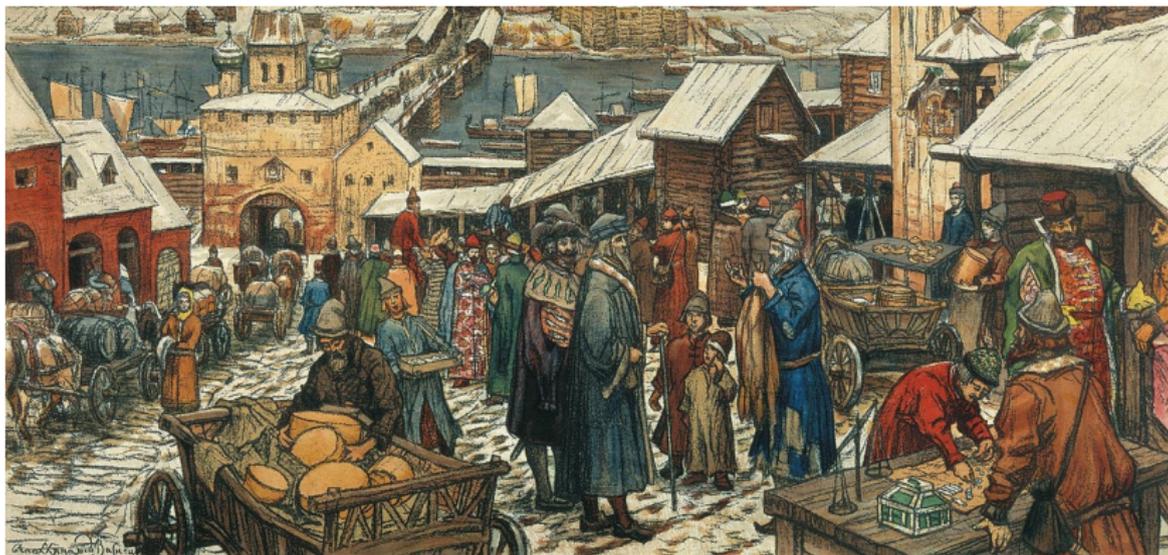
L'Europa e l'Italia 300 anni dopo

Nel XIII secolo, oltre al denaro, hanno corso legale il **tari** (Amalfi), il **fiorino** (Firenze), il **genovino** (Genova), il **ducato** (Venezia). In Italia ci sono 28 valute diverse, di cui sette nella sola Toscana.

The New Trade Routes, 1200-1350 AD



I tempi di viaggio sono lunghi: si percorrono circa 30-40 km. al giorno.
Una lettera da Firenze a Genova o a Venezia impiega circa 6 giorni.



Si affermano mercanti e cambiavalute (*banche del giro*), che devono far di conto velocemente e accuratamente.

Se 7 balle di pepe valgono 4 bezants e 9 libbre di zafferano valgono 11 bezants, quanto zafferano si può comprare con 23 balle di pepe?

Nuovi strumenti finanziari



Conto corrente: un mercante che intraprende un viaggio d'affari deposita una somma presso il banco della sua città.

Lettera di credito: consente al mercante di prelevare denaro presso il banco di un'altra città. (Oggi usiamo il Bancomat.)

Lettera di cambio: un acquirente promette di pagare una cifra pattuita per la merce ricevuta, precisando luogo e data. (Oggi c'è la cambiale.)

Depositi di denaro: somme depositate nei forzieri dei banchi, che pagano un interesse ai depositanti.

Credito a interesse: prestito erogato dai banchi a mercanti e artigiani, in cambio di un interesse.

Leonardo Pisano Bigollo (c1170-c1241)

Accompagna il padre nella colonia pisana di Bugia (Bejaia, Algeria).

Lì apprende dagli arabi la notazione decimale e i loro metodi matematici.

Rientra in Italia intorno al 1200.

Nel 1202 pubblica il *Liber Abbaci* dove:

- ▶ dimostra i vantaggi della notazione decimale e del “metodo Indiano”;
- ▶ sviluppa il calcolo del valore attuale e degli arbitraggi;
- ▶ tratta l'interesse composto e la serie geometrica;
- ▶ introduce la “successione di Fibonacci”: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Una seconda edizione è pubblicata nel 1228.

Il manuale *Libro di minor guisa*, rivolto ai mercanti, è andato perso.

Nel 1241 il comune di Pisa gli attribuisce una pensione in riconoscimento del suo insegnamento e delle sue consulenze di matematica commerciale.

Fibonacci è virale

The Fibonacci Quarterly

Official Publication of The Fibonacci Association



Statua
Camposanto, Pisa



Il volo dei numeri, Mario Mertz
Mole Antonelliana, Torino

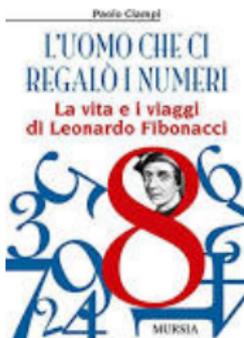
Caveat emptor

I numeri magici
di Fibonacci



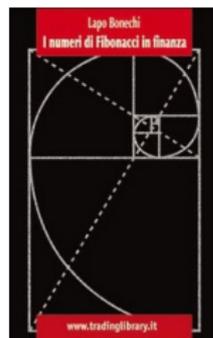
Divulgazione
ottimo

L'uomo che ci
regalò i numeri



Biografia
buono

I numeri di Fibo-
nacci in finanza



Business
???

I numeri di Fibo-
nacci e le onde
di Elliott



Business
???

Liber Abbaci

Una lira è divisa in 20 soldi e ogni soldo in 12 denari.

Come si scrive un prezzo di 5 lire, 6 soldi e 4 denari?

Il *Liber* introduce le frazioni: $\frac{4}{12} \frac{6}{20} 5$.

Se 100 balle costano 40 lire, quanto costano cinque balle?

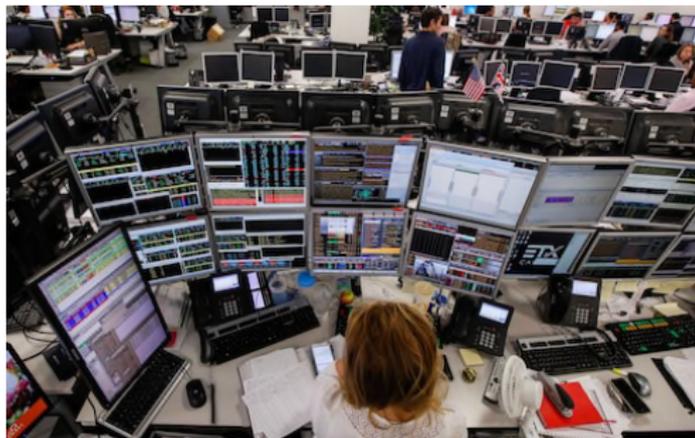
Il *Liber* imposta lo schema $\left[\begin{array}{cc} 40 & 100 \\ ? & 5 \end{array} \right]$ per calcolare $\frac{40 \cdot 5}{100}$.

Questa *Regola del tre* per risolvere le proporzioni si generalizza in una *Regola del cinque*.

Se 7 balle di pepe valgono 4 bezants e 9 libbre di zafferano valgono 11 bezants, quanto zafferano si può comprare con 23 balle di pepe?

Se 7 denari valgono 4 fiorini e 9 ducati valgono 11 fiorini, quanti ducati si possono comprare con 23 denari?

Arbitraggi su valute



	USD	Sterlina (UK)	Euro	Rupia indiana	Yen (Giappone)	Real (Brasile)
Dollaro (USA)	1	0.59423	0.72978	58.4666	101.39	2.20612
Sterlina (UK)	1.68264	1	1.22797	98.3782	170.6	3.71211
Euro	1.37017	0.81421	1	80.1092	138.92	3.02276
Rupia indiana	0.01706	0.01014	0.01245	1	1.73	0.03764
Yen (Giappone)	0.00986	0.00586	0.0072	0.57661	1	0.02176
Real (Brasile)	0.45202	0.26861	0.32988	26.4283	45.83	1

Se cambio sterline per 1000 reali brasiliani e poi li converto in sterline, ci rimetto 0.78 sterline.

	USD	GBP	EUR	INR	JPY	BRL
USD	1	0.59445	0.72978	58.4666	101.39	2.20612
GBP	1.68264	1	1.22797	98.6623	170.6	3.71211
EUR	1.37017	0.81421	1	80.1092	138.92	3.02276
INR	0.01706	0.01014	0.01245	1	1.74	0.03764
JPY	0.01039	0.00586	0.0072	0.57661	1	0.02176
BRL	0.45202	0.26861	0.32988	26.4283	45.83	1

Organizzate un'oculata sequenza di cambi:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{USD} & & \text{GBP} & & \text{JPY} & & \text{USD} \\
 1000 & \rightarrow & 594.45 & & & & \\
 & & 594.45 & \rightarrow & 101\,413,17 & & \\
 & & & & 101\,413,17 & \rightarrow & 1054.68
 \end{array}$$

Un sistema di valute (o di prezzi) consente un **arbitraggio** se esiste una sequenza di scambi al termine della quale ci si ritrova più ricchi.

Sfruttare un'opportunità di arbitraggio assomiglia a piantare zecchini nel Campo dei Miracoli.

Liber Abbaci e matematica finanziaria

Un *commendator* presta al *tractator* il capitale per la durata del suo viaggio, contro il diritto al 75% dei suoi profitti.

Anna investe 13 lire in una società che presta un capitale di 152 lire al tractator, il quale consegue un profitto di 56. Quanto deve ricevere Anna?

Leonardo risolve problemi di matematica finanziaria (senza conoscere i logaritmi).

Il re promette a un soldato una rendita di 300 bezants all'anno, pagabili in rate trimestrali da 75. Al termine di ciascun trimestre, il soldato matura un interesse del 2% mensile sul capitale.

Se il re cambia idea e versa l'intera somma di 300 bezants alla fine dell'anno, come cambia in percentuale il guadagno del soldato?

L'invenzione del debito pubblico

Nel 1171 Venezia impose un prestito forzoso a tutti i suoi cittadini per finanziare la costruzione di una flotta con cui attaccare Bisanzio.

Nel 1262 il debito veneziano fu consolidato, iniziando la pratica di finanziare il governo attraverso il debito pubblico.

La terza guerra contro Genova (1378–81) condusse alla prima crisi finanziaria dello stato.

Jean Trenchant, *L'Arithmetique*, 1558:

Nel 1555, per finanziare la guerra, il re Enrico prese denaro a prestito dai banchieri contro una rendita perpetua ad un tasso del 4% quadrimestrale.

Nello stesso anno, ricevette una somma di 3.945.941 scudi da ripagare in 41 rate quadrimestrali al tasso del 5% quadrimestrale.

Quale fra i due finanziamenti è più profittevole per i banchieri?

La diffusione della matematica commerciale

Aprono le prime scuole di commercio: Verona (1284), Firenze (1304), Milano (1316).

Nel 1408 nasce la *Scuola di Rialto* a Venezia, dove Luca Pacioli segue le lezioni di matematica di Domenico Bragadin.

Nel 1458 Benedetto Cotrugli scrive il *Libro del'arte dela mercatura*, prima monografia sulla partita doppia. (Esce a stampa nel 1573.)

Nel 1478 esce a stampa l'*Aritmetica Treviso*, testo di problemi commerciali in dialetto veneziano.

Nel 1494, esce a stampa la *Summa* di Luca Pacioli, che contiene il trattato *De computis et scripturis* sulla partita doppia.

[...]

Nel 1868 Vittorio Emanuele II istituisce la *Regia Scuola Superiore di Commercio* in Venezia (oggi Ca' Foscari).

Luca Pacioli (1445–1517)

Nasce a Borgo Sansepolcro.

Nel 1464 si trasferisce a Venezia, dove entra a servizio presso il mercante Antonio de' Rompiasi e frequenta la Scuola di Rialto.

Insegna matematica in diverse città, fra cui Perugia, Napoli, Firenze, Venezia e Zara.

Nel 1478 scrive il *Tractatus mathematicus ad discipulos perusinos*.

Frequenta uomini di cultura come Piero della Francesca, Leon Battista Alberti e Leonardo da Vinci (di cui diventa amico).

Nel 1494 esce a stampa in Venezia la *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita*. (A 49 anni dalla *Bibbia* di Gutenberg.)

Nel 1508 è a Venezia come docente presso la Scuola di Rialto.

Nel 1509 esce a stampa *De Divina Proportione* sulla sezione aurea.

Tractatus mathematicus ad discipulos perusinos

Nel proemio Pacioli si compiace con i *gentilomini perugini* per aver elevato la matematica a dignità di insegnamento nell'Università della *augusta ed inclita città* di Perugia.

Pacioli compila l'opera per istruire coloro che vogliono dedicarsi all'arte della mercatura.

Suo intento è fornire le *regole generali e particolari* che governano l'attività mercantile in modo che il mercante possa *pervenire a notizia de' lecita e giusta mercantia in la quale spessissime volte casca in fraude e peccato solo per non intendere el modo de ragione.*

Il disegno è chiaro: applicare all'arte mercantile la matematica e la geometria, *regine di tute l'altre scientie commo testificano tuti degni filosofi.*

Soltanto attraverso la loro piena conoscenza il mercante potrà *a presso l'onore* conseguire *l'utile* nella conduzione degli affari.

Tractatus mathematicus ad discipulos perusinos

Il libro contiene numerosi motti di spirito:

- ▶ *vol più punti a fare un mercante che a far un dottore de' leggi;*
- ▶ *la testa del mercante somiglia ad una che abbia cento occhi che ancora non gli bastano né in dir, né in fare;*
- ▶ *chi non fa non falla e chi non falla non impara.*

Precorrendo l'uso moderno dei “casi” aziendali, Pacioli scrive che gli studenti apprendono studiando un caso *più che se tu desse a loro mille letioni.*

Nella parte XI del *Tractatus* sviluppa 38 “Tastoni” pedagogici per imparare *provando e riprovando* (oggi diremmo, *by trial and error*).

Il caso dei giudei e dei cristiani

Acade una volta che in una nave erano più mercatanti, di quali 30 erano giudei e 2 erano cristiani, unde navigando sopravvenne una gran fortuna, per modo che gli era de bisogno alleviare la nave de qualche persona a ciò che tutti non perissero.

Ma in simili chasi avenga ci fossero giudei, non di meno ciascuno teme Dio e non voliano far torto a persona de bugliarlo a forza in aqua e li pover mercatanti cristiani se vediano a mal partito perché aviano paura che coloro non li sforzasse perché erano pochi e meno di loro.

Soluzione: uno dei due cristiani, che era un *bonissimo ragioniere*, propose di fare un cerchio e far la conta, buttando in acqua ogni volta la nona persona raggiunta dalla conta.

I due cristiani si misero uno accanto all'altro e si iniziò a contare dal quinto giudeo verso il primo cristiano.

Dalla computisteria alla contabilità

La **matematica** è una delle più belle invenzioni dello spirito umano. . .
Esprime lo stesso spirito che ha generato i sistemi di Galileo e Newton e
che ha definito l'oggetto di studio della fisica e della chimica moderne.
Con gli stessi mezzi, essa organizza le percezioni in un sistema.

La **contabilità a partita doppia** è una delle più belle invenzioni dello
spirito umano. . . Esprime lo stesso spirito che ha generato i sistemi di
Galileo e Newton e che ha definito l'oggetto di studio della fisica e della
chimica moderne. Con gli stessi mezzi, essa organizza le percezioni in un
sistema.

J.W. Goethe, Gli anni di apprendistato di Wilhelm Meister (1796)

L'invenzione della **contabilità a partita doppia** è l'evento cruciale della
storia economica dell'Europa.

O. Spengler, Il declino dell'occidente (1928)

Due bilanci a confronto

Ubi non est ordo, ibi est confusio. (Luca Pacioli)

	Costi	Ricavi		Costi	Ricavi
Salari	VIIID		Salari	7500	
Affitti	MD		Affitti	1500	
Utenze	CXX		Utenze	120	
Viaggi	X		Viaggi	100	
Interessi	LXXX		Interessi	80	
Vendite		\bar{X}	Vendite		10000
Utile	???		Utile	700	

Nel 1399 a Firenze fu promulgata una legge che vietava ai banchieri di usare i numeri arabi a favore dei numeri romani o delle parole (considerati più difficili da truccare).

Tutt'ora spesso riportiamo i numeri a parole su documenti e contratti.

FIFO e LIFO

Tasse e inflazione interferiscono con la legge associativa dell'addizione.

FIFO=first in, first out

LIFO=last in, first out

Un commerciante compra quattro monete d'oro identiche a prezzi diversi e ne vende una per 500 euro. L'aliquota fiscale è al 35%. A quanto ammontano le tasse e il suo guadagno netto?

Moneta	Costo		FIFO
1*	275	Ricavo	500
2	325	Costo	<u>-275*</u>
3	350	Guadagno lordo	225
4	<u>400</u>	Tasse	<u>-79</u>
	1350	Guadagno netto	146

Un commerciante compra quattro monete d'oro identiche a prezzi diversi e ne vende una per 500 euro. L'aliquota fiscale è al 35%. A quanto ammontano le tasse e il suo guadagno netto?

Moneta	Costo		FIFO	LIFO
1	275	Ricavo	500	500

Il successo della Summa

Il lessico commerciale testimonia l'influenza della lingua italiana.

In tedesco: Konto — Bilanz (bilancio) — Quittung (quietanza) — Skonto — Bankrott (bancarotta) — Saldo — Debitoren, Kreditoren — Netto — Stornieren (stornare).

Primo testo a stampa sulla partita doppia:

1518 Germania

1537? Fiandre

1590 Spagna

1646 Svezia

1673 Danimarca

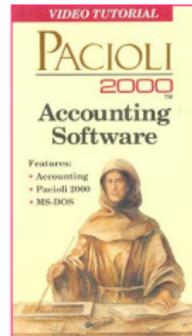
1683 Scozia

1758 Portogallo

1775 Norvegia

1783 Russia

Anche Pacioli è virale



Le rendite

La **rendita** promette un flusso di pagamenti futuri contro la cessione di un capitale oggi.

Un contratto simile è in uso nell'antica Roma, che ci ha tramandato le tavole del giurista Ulpiano.

Nel Medioevo, i prestiti in denaro sono malvisti per via delle restrizioni religiose sull'usura.

Un contratto di prestito si caratterizza per la restituzione del denaro.

Le istituzioni religiose e civiche sviluppano forme alternative di prestito.

La **rendita vitalizia** promette pagamenti periodici a vita.

(Come in un'odierna pensione, che converte il capitale maturato.)

La **rendita perpetua** promette un flusso di pagamenti senza scadenza.

Nel 1535, il 60% delle entrate di Amsterdam va in interessi e rendite.

Nel XVII secolo, le rendite sono molto diffuse in Olanda e Inghilterra.

Il prezzo delle rendite vitalizie non dipende dall'età del beneficiario.

Jan De Witt (1625-1672)

Fu un matematico e un politico di rilievo durante il Secolo d'oro olandese.

A 28 anni fu nominato (dall'influente zio) Pensionario del Consiglio d'Olanda, ovvero capo del governo.

Tre anni dopo diventò Gran Pensionario delle Sette Province Unite e restò in carica per 19 anni, fino alla morte.

Fu linciato durante il Rampjaar (1672), quando i Paesi Bassi furono attaccati da Inghilterra, Francia e altri e gli Orangisti presero il potere.

L'episodio apre *Il tulipano nero* (1850), romanzo di Dumas padre.

Fra il 1647 e il 1650 scrive *Elementa curvarum linearum*, considerato da alcuni il primo libro di testo di geometria analitica.

Nel 1671, pubblica *Il valore delle rendite vitalizie rispetto alle obbligazioni* e fornisce un metodo per valutare il prezzo delle rendite, basato sul valore atteso del flusso scontato dei pagamenti.

Dimostra che lo stato vende le rendite a prezzi troppo bassi, aggravando un debito pubblico già molto pesante.

De Witt non è virale, ma ha impatto



La regina Guglielmina gli dedica una statua a L'Aia il 12 giugno 1918.

Il libro sulle rendite desta molto interesse ma è difficile da trovare: lo cercano senza successo Leibniz e Jacob Bernoulli.

Bernoulli studia le serie geometriche per valutare le rendite perpetue. (Studia anche la capitalizzazione continua, mostrando come approssimare il numero e prima che sia scoperto.)

Il nipote Nicholas ricava la formula per valutare le rendite a rate costanti.

Il metodo di De Witt è perfezionato dai matematici Jan Hudde (sindaco di Amsterdam), Edmund Halley (astronomo) e DeMoivre (probabilista).

Affari sballati

Le nazionalità degli ultimi tre autori non sono un caso: fra il XVII e il XVIII secolo Francia, Inghilterra e Olanda sono spesso impegnate in guerre, finanziate dal debito pubblico.

In Francia fu molto popolare la **tontina**, proposta dal banchiere Lorenzo de Tonti al cardinale Mazarino nel 1653 e messa al bando nel 1763.

Nella tontina una somma fissa è divisa fra i sottoscrittori in vita, fino alla morte dell'ultimo: chi sopravvive vede aumentare la sua rendita.

Questo schema ha ispirato molte storie, anche umoristiche, fra cui: *The Wrong Box* (1889) di Stevenson e Osbourne, *Something Fishy* di Wodehouse, l'episodio 22 della stagione 7 de *I Simpsons*.

Rivelatrice la tecnica delle *trenta damigelle di Ginevra* ideata per sfruttare i prezzi troppo bassi delle rendite: si intestava una rendita a ciascuna di trenta bambine, con età intorno ai cinque anni, da famiglie in buona salute e che avessero già contratto il vaiolo.

Diversificare il rischio

Il mercante di Venezia: Antonio possiede all'estero merce per 8000 ducati da trasportare a Venezia via mare.

La probabilità che una nave sia catturata dai pirati è $1/2$.

Se Antonio spedisce tutta la merce su una sola nave, rischia 8000 con prob.tà $1/2$ e 0 con prob.tà $1/2$.

Se invece suddivide la merce fra due navi, rischia 8000 con prob.tà $1/4$, 4000 con prob.tà $1/2$ e 0 con prob.tà $1/4$.

Il valore atteso resta 4000, ma nel secondo caso c'è minore variabilità negli esiti e la bancarotta è meno probabile.

Diversificare il rischio vuol dire “non mettere tutte le uova in un paniere”.

Le trenta damigelle di Ginevra diversificano il rischio che qualcuna muoia comunque giovane.

Analogamente, molti preferiscono investire in ETF (*Exchange Traded Funds*) o in fondi comuni di investimento.

La scelta del portafoglio

Harry Markowitz (1927-) nel 1990 ha condiviso con Merton Miller e William Sharpe il “premio Nobel per l’Economia” per il loro lavoro pioneristico in teoria dell’economia finanziaria.

Il suo contributo principale è apparso in un articolo nel 1952, maturando nel 1959 in una monografia intitolata *Portfolio selection: Efficient diversification*.

Markowitz riassume un investimento con due numeri: il valore atteso e la varianza del rendimento.

La scelta di come combinare i titoli in un portafoglio cerca di ottimizzare il compromesso fra la ricerca di un alto rendimento medio con una bassa varianza.

L’uso di media e varianza fu anticipato da Bruno de Finetti in un articolo del 1940 in lingua italiana, per un caso speciale.

A Markowitz va ascritto il merito di aver esteso il calcolo al caso generale, usando tecniche di programmazione quadratica.

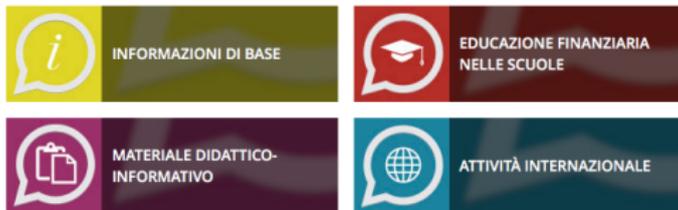
Martedì scorso, durante il *IX Salone del Risparmio* a Milano, Magda Bianco (Servizio Tutela dei clienti e antiriciclaggio di Banca d'Italia) ha annunciato un portale sull'educazione finanziaria in Italia.

Il portale **Quello che conta** era atteso in linea per il 13 aprile.

Educazione finanziaria

Questa sezione si rivolge ai cittadini interessati a sviluppare le loro conoscenze in campo economico e finanziario e a tutti coloro che, come risparmiatori e fruitori di servizi bancari, vogliono coltivare la propria cultura finanziaria.

La Banca d'Italia è impegnata nella promozione dell'educazione finanziaria ed è membro del Comitato per la programmazione e il coordinamento delle attività di educazione finanziaria. Il Comitato nasce con l'obiettivo di promuovere e programmare iniziative di sensibilizzazione ed educazione finanziaria e svolgerà un ruolo cruciale nell'impostazione e nell'attuazione della Strategia nazionale basata sulla integrazione e la diffusione di conoscenze di base e di strumenti che consentano di familiarizzare con prodotti e regole talvolta di difficile comprensione. Cittadini con maggiori conoscenze nel campo finanziario comprendono più chiaramente rischi e opportunità dei prodotti offerti; compiono scelte più consapevoli su indebitamento, risparmio e previdenza; contribuiscono alla formazione di un mercato più inclusivo, efficiente e stabile.



<http://www.bancaditalia.it/servizi-cittadino/cultura-finanziaria/materiale-didattico/index.html>

Grazie per l'attenzione!